CORRECTION : EPREUVE MATHEMATIQUES Session de contrôle 2019 BAC MATHS

Exercice N°1 :

1°) $\left(t_{\overrightarrow{AC}}\ o\ S_{(AC)}\right)^{-1}=\left(S_{(AC)}\right)^{-1}\ o\ \left(t_{\overrightarrow{AC}}\right)^{-1}=S_{(AC)}\ o\ t_{\overrightarrow{CA}}$ et $S_{\Delta}\circ S_{(AC)}=t_{\overrightarrow{AB}}$ car $\Delta \parallel (AC)$

$\Rightarrow \left(t_{\overrightarrow{BC}}\circ S_{\Delta}\right)\circ\left(t_{\overrightarrow{AC}}\circ S_{(AC)}\right)^{-1}=t_{\overrightarrow{BC}}\circ S_{\Delta}\circ S_{(AC)}\circ t_{\overrightarrow{CA}}=t_{\overrightarrow{BC}}\circ t_{\overrightarrow{AB}}\circ t_{\overrightarrow{CA}}=t_{\vec{0}}=idp$

$\Rightarrow t_{\overrightarrow{BC}}\circ S_{\Delta}=t_{\overrightarrow{AC}}\circ S_{(AC)}$ $\Rightarrow$ **Vrai**

Ou bien : $t_{\overrightarrow{BC}}\circ S_{\Delta}=t_{\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}}\circ S_{\Delta}=t_{\overrightarrow{AC}}\circ t_{\overrightarrow{BA}}\circ S_{\Delta}=t_{\overrightarrow{AC}}\circ S_{(AC)}$ car $t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}}(\Delta)=(AC)$

2°) $S_{(AB)}\circ h_{(A,2)}\circ S_{(AC)}=S_{(AB)}\circ S_{(AC)}\circ h_{(A,2)}=r_{(A,\pi)}\circ h_{(A,2)}=h_{(A,-2)}$ $\Rightarrow$ **Vrai**

3°) f est une isométrie qui fixe A et B donc $f=idp$ ou $f=S_{(AB)}$ d'où $f^{-1}=idp$ ou $f^{-1}=S_{(AB)}$

- $f=idp \Rightarrow f^{-1}\circ S_{\Delta}\circ f=S_{\Delta}$
- $f=S_{(AB)} \Rightarrow f^{-1}\circ S_{\Delta}\circ f=S_{(AB)}\circ\overbrace{S_{\Delta}\circ S_{(AB)}}^{(AB)\perp\Delta}=\overbrace{S_{(AB)}\circ S_{(AB)}}^{idp}\circ S_{\Delta}=S_{\Delta}$

  Donc $f^{-1}\circ S_{\Delta}\circ f=S_{\Delta} \Rightarrow$ **Faux**

Exercice N°2:

1°) a) figure 1

b) $\mathrm{I}\neq\mathrm{D}$ et $\mathrm{D}\neq\mathrm{K}$ donc il existe une similitude indirecte g qui transforme I en D et D en K

c) Soit k le rapport de g on a : $k=\dfrac{\mathrm{DK}}{\mathrm{ID}}=\dfrac{|z_{\mathrm{K}}-z_{\mathrm{D}}|}{|z_{\mathrm{D}}-z_{\mathrm{I}}|}=\dfrac{|3i-2i|}{|2i-1-i|}=\dfrac{|i|}{|-1+i|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

d) IDO est un triangle rectangle et isocèle en I, on sait que $g(\mathrm{I})=\mathrm{D}$ et $g(\mathrm{D})=\mathrm{K}$

$\Rightarrow g(\mathrm{IDO})=\mathrm{DK}g(\mathrm{O})$ est un triangle rectangle et isocèle indirecte en D d'où $g(\mathrm{IDO})=\mathrm{DKC}$

2°) a) $g(\mathrm{M})=\mathrm{M}'\Leftrightarrow z'=a\bar{z}+b$, on a $g(\mathrm{IDO})=\mathrm{DKC}$ donc $g(\mathrm{O})=\mathrm{C}\Rightarrow b=1+2i$

$g(\mathrm{D})=\mathrm{K}\Rightarrow 3i=a\times\overline{2i}+b\Rightarrow 3i=-2ia+1+2i\Rightarrow -1+i=-2ia\Rightarrow a=\dfrac{-1+i}{-2i}=-\dfrac{1+i}{2}$

Donc $z'=-\dfrac{1}{2}(1+i)\bar{z}+1+2i$

b) $z_{\Omega}=\dfrac{a\times\bar{b}+b}{1-|a|^{2}}$

- $a\times b+b=-\dfrac{1}{2}(1+i)(1-2i)+1+2i$

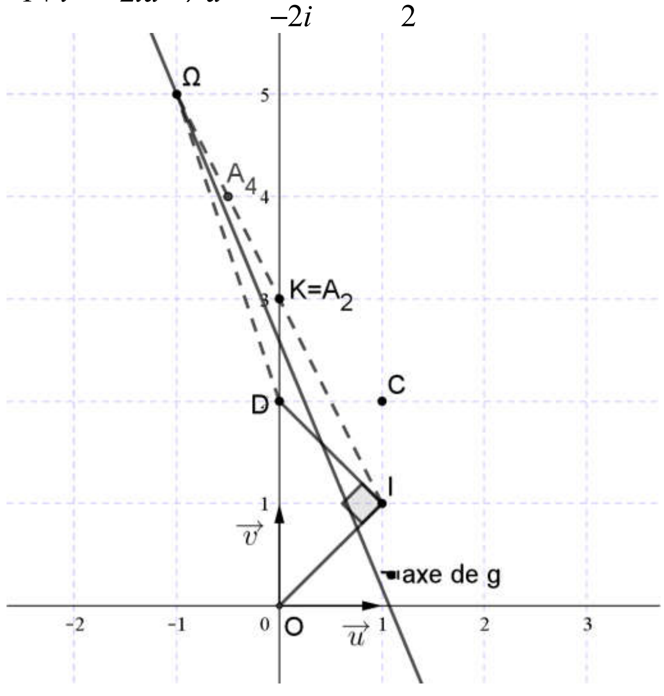
  $=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{2}i$

- $1-|a|^{2}=1-\left|-\dfrac{1}{2}(1+i)\right|^{2}=\dfrac{1}{2}$

il en résulte que $z_{\Omega}=-1+5i$

$\Rightarrow \mathrm{K}$ est le milieu de segment $[\Omega\mathrm{I}]$

d) L'axe de g porte la bissectrice intérieur de l'angle $\mathrm{I}\hat{\Omega}\mathrm{D}$



3°) a) $g=\overbrace{h'_{\left(\Omega,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}\circ S_\Delta}^{\text{forme réduite}}=S_\Delta\circ h'_{\left(\Omega,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}\Rightarrow g\circ g=h'_{\left(\Omega,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}\circ\overbrace{S_\Delta\circ S_\Delta}^{idp}\circ h'_{\left(\Omega,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}=h_{\left(\Omega,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$, ($\mathrm{h}'$ homothétie)

b) $A_0=I\Rightarrow A_2=h(A_0)=h(I)\Rightarrow\overrightarrow{\Omega A_2}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega I}=A_2=K$

$A_4=h(A_2)=h(K)\Rightarrow\overrightarrow{\Omega A_4}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega K}\Rightarrow A_4$ est le milieu du segment $[\Omega K]$

c) $A_2=h(A_0)$ et $A_4=h(A_2)\Rightarrow\overrightarrow{A_2A_4}=\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0A_2}\Rightarrow A_2A_4=\frac{1}{2}A_0A_2$

$A_4=h(A_2)$ et $A_6=h(A_4)\Rightarrow\overrightarrow{A_4A_6}=\frac{1}{2}\overrightarrow{A_2A_4}\Rightarrow A_4A_6=\frac{1}{2}A_2A_4=\left(\frac{1}{2}\right)^2A_0A_2$

$A_6=h(A_4)$ et $A_8=h(A_6)\Rightarrow\overrightarrow{A_6A_8}=\frac{1}{2}\overrightarrow{A_4A_6}\Rightarrow A_6A_8=\frac{1}{2}A_4A_6=\left(\frac{1}{2}\right)^3A_0A_2$

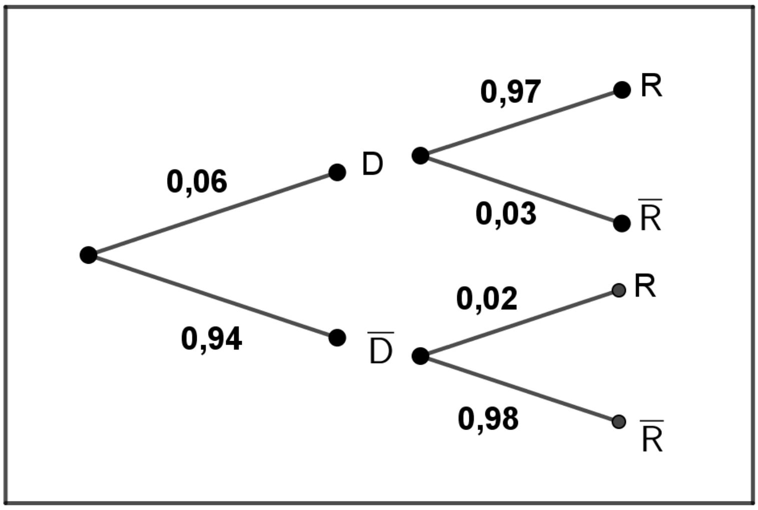
En général : $A_{2n-2}A_{2n}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}A_0A_2$

$$S_n=A_0A_2+A_2A_4+A_4A_6+\ldots+A_{2n-2}A_{2n}=A_0A_2+\frac{1}{2}A_0A_2+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}A_0A_2$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)A_0A_2=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}IK\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}S_n=2\times IK=2\sqrt{5}$$

Exercice N°3 :

1°)



2°) a) $p(D\cap\overline{R})=0,06\times0,03=0,0018$

b) $p(\overline{D}\cap R)+p(D\cap\overline{R})$

$=0,94\times0,02+0,0018=0,0206$

3°) $p(\overline{R})=p(\overline{D}\cap\overline{R})+p(D\cap\overline{R})$

$=0,94\times0,98+0,0018=0,923$

4°) Soit X l'alea numérique qui pour valeur le nombre de fois où la pièce est accepter au cours de trois contrôles

X suit une loi binomiale de paramètre $p=0,923$ et $n=3$

$p(X=k)=C_3^k(0,923)^k\times(0,077)^{3-k}$ avec $k\in\{0,1,2,3\}$

a) $p_1=p(X=2)=C_3^2(0,923)^2\times(0,077)^{3-2}=3(0,923)^2(0,077)$

b) $p_2=p(X=1)+p(X=0)=C_3^1(0,923)^1\times(0,077)^{3-1}+C_3^0\left((0,923)^0\times0,077\right)^{3-0}$

$=3(0,923)\times(0,077)^2+(0,077)^3=0,0169$

Exercice N°4 :

1°) a) $\overrightarrow{N_{P_1}}\begin{pmatrix}3\\-2\\-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{N_{P_2}}\begin{pmatrix}4\\-11\\2\end{pmatrix}$ et $\frac{3}{4}\neq\frac{-2}{-11}\Rightarrow$ P_1 et P_2 sont sécants

b) $M(x,y,z)\in\Delta\Leftrightarrow\begin{cases}3x-2y-2z=1\\4x-11y+2z=0\end{cases}\Leftrightarrow$ pour $x=t\in\mathbb{R}$ $\begin{cases}(1)+(2)\Rightarrow 7t-13y=1\\2z=-4t+11y\end{cases}$

2°) • $7\times2-13\times1=14-13=1$

• $7x-13y=7\times2-13\times1\Leftrightarrow 7(x-2)=13(y-1)$

$\Leftrightarrow 13$ divise $7(x-2)$ et $7\wedge13=1$ donc lemme de Gauss

13 divise $(x-2)$ Ainsi $x-2=13k$; $k\in\mathbb{Z}$ par suite $x=2+13k$; $k\in\mathbb{Z}$

$*$ $7.(13k)=13(y-1)\Leftrightarrow 7k=y-1\Leftrightarrow y=1+7k$; $k\in\mathbb{Z}$

Conclusion : $S_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}=\{(2+13k,1+7k)\ ;\ k\in\mathbb{Z}\}$

3°) a) $(S):\begin{cases}3x-2y-2z=1\\4x-11y+2z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(1)+(2)\Rightarrow 7x-13y=1\\(2)\Rightarrow 2z=-4x+11y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}7x-13y=1\\2z=-4x+11y\end{cases}$

Réciproquement : $\begin{cases}7x-13y=1\\2z=-4x+11y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}7x-13y=1\\2z+4x-11y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(1)-(2)\Rightarrow 3x-2y-2z=1\\2z+4x-11y=0\end{cases}$

(ou bien par équivalence)

3°) b) $\begin{cases}7x-13y=1\\2z=-4x+11y\end{cases}\Leftrightarrow x=2+13k\ ;\ y=1+7k$ et $2z=3+25k\ ;\ k=2p+1\ ,\ p\in\mathbb{Z}$

Donc $M(15+26p,8+14p,14+25p)\ ;p\in\mathbb{Z}^*$

Exercice N°5 :

1°) a) • $x\mapsto u(x)=-\frac{1}{2x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ et $u(\mathbb{R}^*)=]-\infty,0[$

$x\mapsto v(x)=e^x$ est continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]-\infty,0[$ d'où $g=v\circ u$ est continue sur $\mathbb{R}^*$

• $\lim\limits_{x\to0}\left(-\frac{1}{2x^2}\right)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}g(x)=0=g(0)$ donc est continue en 0

g est continue sur $\mathbb{R}^*$ et en 0 d'où elle est continue sur $\mathbb{R}$

b) $x\in\mathbb{R}$, $-x\in\mathbb{R}$ et $g(-x)=g(x)\Rightarrow g$ est paire

Donc la courbe ζ de g admet $(O,\vec{j})$ comme axe de symétrie

2°) a) On pose $X=-\frac{1}{x^2}\Rightarrow x^2=-\frac{1}{X}\Rightarrow x=\sqrt{-\frac{1}{X}}$, $X\to-\infty$ lorsque $x\to0^+$

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{g(x)}{x}\right)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{e^{-\frac{1}{2x^2}}}{x}\right)=\lim_{X\to-\infty}\left(\frac{e^{\frac{X}{2}}}{\sqrt{-\frac{1}{X}}}\right)=\lim_{X\to-\infty}\left(\sqrt{-Xe^X}\right)=0\Rightarrow g_d'(0)=0$$

ζ admet une demi-tangente horizontale au point O par raison de symétrie (g est paire)

$g'(0)=0$

D'où g est dérivable en 0

b) • $x \mapsto u(x) = -\dfrac{1}{2x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $u(\mathbb{R}^*) =]-\infty, 0[$

$x \mapsto v(x) = e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]-\infty, 0[$ d'où g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$

• pour tout $x \neq 0$ on a : $g'(x) = \left(-\dfrac{1}{2x^2}\right)' e^{-\frac{1}{2x^2}} = \dfrac{1}{x^3} e^{-\frac{1}{2x^2}} = \dfrac{g(x)}{x^3}$

c) g est paire $\Rightarrow$ on étudie g sur $[0, +\infty[$, $g'(x) > 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty}\left(-\dfrac{1}{2x^2}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} e^x = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1$

x	0	$+\infty$
g'(x)	+	
g(x)	0 ↗	1

d) g est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$

et $\mathrm{f}([0, +\infty[) = \left[\mathrm{f}(0), \lim\limits_{+\infty} \mathrm{f}\right[= [0, 1[$

$\Rightarrow g$ réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, 1[$

e) $y \in]0, +\infty[$, $x \in]0, 1[$, $g^{-1}(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x \Leftrightarrow e^{-\frac{1}{2y^2}} = x \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2y^2} = \ln x$

$\Leftrightarrow -\dfrac{1}{2\ln x} = y^2$ or $g^{-1}(x) = y \in]0, +\infty[$ et $g(0) = 0 \Leftrightarrow g^{-1}(0) = 0$

D'où $\forall x \in [0, 1[$: $g^{-1}(x) = \sqrt{-\dfrac{1}{2\ln x}}$

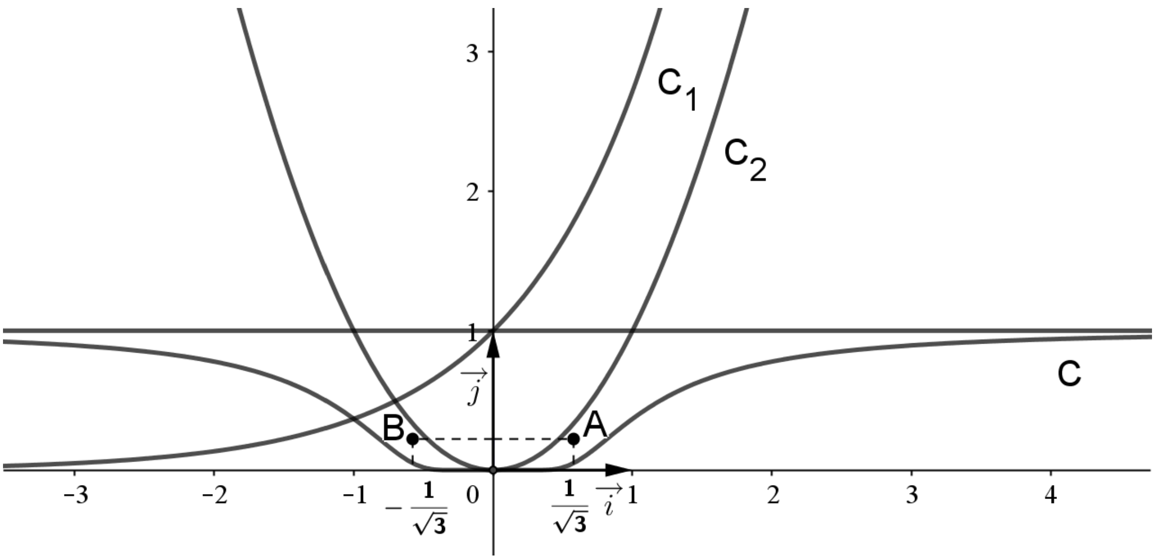
3°) a) Pour tout $x \neq 0$ on a : $g''(x) = \dfrac{x^3 g'(x) - 3x^2 g(x)}{x^6} = \dfrac{x^3 \dfrac{g(x)}{x^3} - 3x^2 g(x)}{x^6} = \dfrac{g(x)(1 - 3x^2)}{x^6}$

Le signe de $g''(x)$ est celui de $(1 - 3x^2)$, on a $1 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ou $x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$g''(x)$ s'annule deux fois et change de signe donc ζ admet deux points d'inflexions $A\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, e^{-\frac{3}{2}}\right)$ et $B\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, e^{-\frac{3}{2}}\right)$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
signe de g''(x)		–	0	+	0	–	

b)



4°) $\forall x \in [0,+\infty[$, $\mathrm{f}(x) = g^2(x) \Rightarrow \mathrm{f}'(x) = 2g'(x)g(x) \geq 0 \Rightarrow \mathrm{f}$ est croissante sur $[0,+\infty[$

5°) a) $V(n) = \pi\int_0^n \mathrm{f}(t)\,dt = \pi\int_0^n g^2(t)\,dt \Rightarrow$ comme g est continue et positive sur $[0,\pi]$

Alors : $V(n)$ est le volume(en unité de volume) engendré par rotation de la courbe ζ au tour de l'axe des abscisses

b) $\pi\int_{\sqrt{n}}^n \mathrm{f}(t)\,dt - \pi\int_{\sqrt{n}}^n \mathrm{f}(t)\,dt = \pi\left(\int_0^n \mathrm{f}(t)\,dt + \int_n^{\sqrt{n}} \mathrm{f}(t)\,dt\right) = \pi\int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{f}(t)\,dt \geq 0$

$$\Rightarrow V(n) \geq \pi\int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{f}(t)\,dt$$

c) • f est croissante sur $[0,+\infty[$; $t \geq \sqrt{n} \Rightarrow \mathrm{f}(t) \geq \mathrm{f}(\sqrt{n}) \Rightarrow \pi\int_{\sqrt{n}}^n \mathrm{f}(t)\,dt \geq \pi\ \mathrm{f}(\sqrt{n})\int_{\sqrt{n}}^n 1\,dt$

$$\Rightarrow V(n) \geq \pi\ \mathrm{f}(\sqrt{n})(n-\sqrt{n}) \Rightarrow V(n) \geq \pi\sqrt{n}\ \mathrm{f}(\sqrt{n})(\sqrt{n}-1)$$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(\sqrt{n}) = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \pi\sqrt{n}\ \mathrm{f}(\sqrt{n})(\sqrt{n}-1) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} V(n) = +\infty$

d) Pour tout réel t de $[0,+\infty[$, $g(t) \leq 1 \Rightarrow \mathrm{f}(t) \leq 1 \Rightarrow \pi\int_{\sqrt{n}}^n \mathrm{f}(t)\,dt \leq \pi\int_{\sqrt{n}}^n 1\,dt$

$$\Rightarrow V(n) \leq \pi(n-\sqrt{n}) \leq \pi n$$

e) $\pi\mathrm{f}(\sqrt{n})(n-\sqrt{n}) \leq V(n) \leq \pi n \Leftrightarrow \pi\ \mathrm{f}(\sqrt{n})\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \leq \dfrac{V(n)}{n} \leq \pi$

$$\lim_{n\to+\infty} \pi\,\overbrace{\mathrm{f}(\sqrt{n})}^{1}\left(1-\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}}_{0}\right) = \pi \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{V(n)}{n} = \pi$$