

| | |
|------------------------------------|------------------------|
| Examen du baccalauréat (Juin 2012) | Epreuve : MATHÉMATIQUE |
| Section : Sciences Techniques | Session principale |

Exercice 1

| | | | |
|----|----|----|----|
| 1) | 2) | 3) | 4) |
| c) | a) | a) | c) |

Exercice 2

On considère les points $A(2,1,1)$ $B(1,1,0)$ $C(1,0,1)$

$$1/a/ \quad \vec{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad \vec{AB} \wedge \vec{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\vec{AB} \wedge \vec{AC} \neq \vec{0}$ donc A, B et C déterminent un plan.

b/ $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ est un vecteur normal au plan P, d'où $P : x - y - z + d = 0$

comme $A \in P$, $d = 0$ et on trouve $P : x - y - z = 0$.

2/ $D(2,0,0)$.

a/ $D \notin P$ car $2 \neq 0$ donc les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires

$$b/ \quad \vec{AD} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad V = \frac{1}{6} \|(\vec{AB} \wedge \vec{AC}) \cdot \vec{AD}\| = \frac{1}{6} |-2| = \frac{1}{3}$$

3/ Soit (S) la sphère de centre $I \begin{pmatrix} 3 \\ 2,1 \\ 2,1 \end{pmatrix}$ et passe par le point D.

$$\vec{IA} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} ; \quad \vec{IB} \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} ; \quad \vec{ID} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$IA = IB = ID = \frac{\sqrt{3}}{2}$ donc les points A et B appartiennent à (S).

b/ (S) et P contiennent les points A et B donc ils ne sont ni tangents ni disjoints par suite ils se coupent suivant un cercle (\mathcal{C})

$$\vec{IC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{\square}{2} \end{pmatrix}$$

c/ IC = ID donc C appartient à (S)

A, B et C appartiennent à S ∩ P donc (\mathcal{C}) est circonscrit au triangle ABC. tel que

$$\Delta: \begin{cases} x = \frac{3}{2} - \alpha \\ y = \frac{1}{2} + \alpha \\ z = \frac{1}{2} + \alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$$

4/ a/ $\begin{cases} \Delta \perp P \\ U \in \Delta \end{cases}$ donc

b/ le centre du cercle est le projeté orthogonal de I sur P c'est Ω .

$$\Omega \in \Delta \cap P \quad \xi \quad \text{il existe un réel } \alpha \text{ tel que } \begin{cases} x = \frac{3}{2} - \alpha \\ y = \frac{1}{2} + \alpha \\ z = \frac{1}{2} + \alpha \\ x - y - z = 0 \end{cases} \quad \xi \quad \begin{cases} \alpha = \frac{1}{6} \\ x = \frac{4}{3} \\ y = \frac{2}{3} \\ z = \frac{2}{3} \end{cases}$$

d'où $\Omega \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

c/ $D' = S_{\Omega}(\square) \quad \xi \quad \begin{cases} x_{D'} = 2x_{\Omega} - x_D \\ y_{D'} = 2y_{\Omega} - y_D \\ z_{D'} = 2z_{\Omega} - z_D \end{cases} \quad \xi \quad \begin{cases} x_{D'} = \frac{\square}{3} - 2 = \frac{2}{3} \\ y_{D'} = \frac{4}{3} \\ z_{D'} = \frac{4}{3} \end{cases}$

donc

$$D' \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

On pose V' = Volume du tétraèdre D'ABC

$$\vec{AD'} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}; \quad V' = \frac{1}{6} |(\vec{AB} \wedge \vec{AC}) \cdot \vec{AD'}| = \frac{1}{6} \left| \frac{4}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right|$$

d'où : $V' = V = \frac{1}{\square}$

Exercice n°3

1/a/ f est continue et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$ donc f réalise une bijection de $[1, +\infty[$

sur $f([1, +\infty[) =]-\infty, 1]$; $0 \in]-\infty, 1]$ et $f(1) \neq 0$

Par suite l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]1, +\infty[$.

$$f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 2 - \alpha + \ln \alpha = 0$$

b/ f est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$

| | | | |
|------|---|----------|-----------|
| x | 1 | α | $+\infty$ |
| f(x) | + | 0 | - |

2/

a/ Démonstration par récurrence

$$* u_0 = 1 \quad \text{donc} \quad 1 \leq u_0 \leq \alpha$$

$$* \text{ Soit } n \in \mathbb{N}, \text{ supposons que } 1 \leq u_n \leq \alpha$$

$$\text{donc } \ln 1 \leq \ln u_n \leq \ln \alpha \quad \text{d'où} \quad 2 \leq 2 + \ln u_n \leq 2 + \ln \alpha$$

$$\text{Comme } \ln \alpha = \alpha - 2 \quad \text{donc} \quad 1 \leq u_{n+1} \leq \alpha$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$ $1 \leq u_n \leq \alpha$

$$\text{b/ Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = 2 + \ln u_n - u_n = f(u_n)$$

$$\left(u_n \right)_n \subset]-\infty, \alpha] \quad \text{donc } \left(u_n \right)_n \text{ est croissante.}$$

c/ * La suite $\left(u_n \right)_n$ est croissante et majorée par α elle converge vers un réel ℓ .

* Soit g la fonction définie et continue sur \mathbb{R}_+^* par $g(x) = 2 + \ln x$

$$* \text{ Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad g(u_n) = u_{n+1}$$

* $\left(u_n \right)_n$ converge vers ℓ et g est continue en ℓ

$$\text{Donc } g(\ell) = \ell$$

Ce qui donne $g(\ell) - \ell = 0$ d'où $f(\ell) = 0$ Ainsi $\left(u_n \right)_n$ converge vers α .

Exercice n°4 :

1/a/ Par lecture graphique

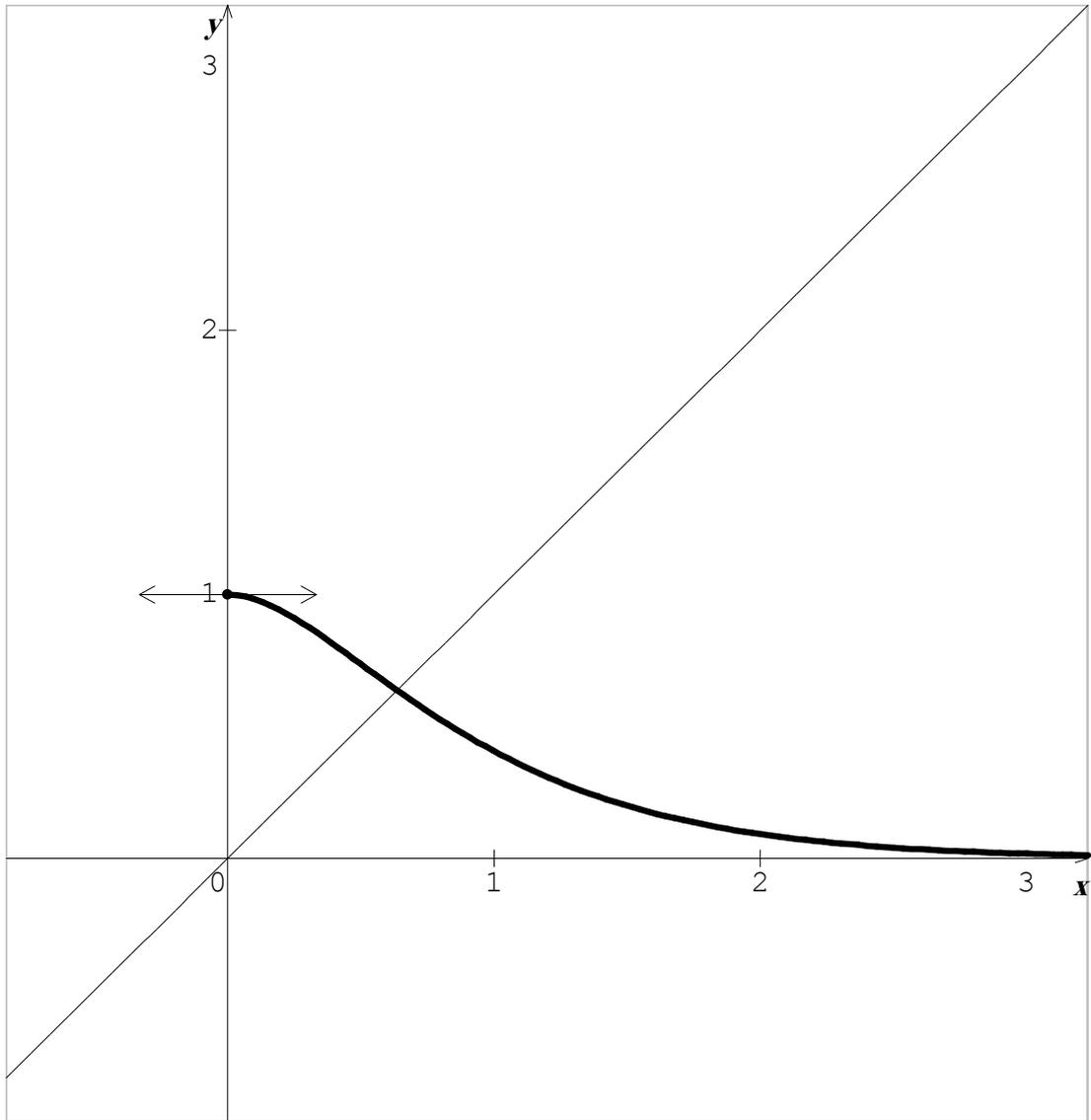
$$* f(0) = 1$$

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$* f'(0) = 0$$

b/ * f est continue et strictement décroissante sur $[0, +\infty[$ donc f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $f([0, +\infty[) =]0, 1]$.

2/



3/ $f(x) =$

$$(ax+b)e^{-2x}$$

, $x \in$

$[0, +\infty[$, a et $b \in \mathbb{R}$

$$a/ \begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a - 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = 2 \end{cases}$$

Donc, pour tout $x \in [0, +\infty[$, $f(x) = (2x+1)e^{-2x}$

$$b/ I = \int_0^\beta (2x+1)e^{-2x} dx$$

Intégration par parties:

On pose $u(x) = 2x+1$; $u'(x) = 2$

$$v'(x) = e^{-2x} \quad ; \quad v(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}$$

$$I = \left[-\frac{1}{2(2x+1)}e^{-2x} \right]_0^\beta - \int_0^\beta -\frac{1}{2}e^{-2x} dx = \left[-\frac{1}{2}(2x+1)e^{-2x} - \frac{1}{2}e^{-2x} \right]_0^\beta$$

$$= -\frac{1}{2}(2\beta + 1)e^{-2\beta} - \frac{1}{2}e^{-2\beta} + 1$$

$$\boxed{I = 1 - (\beta + 1)e^{-2\beta}}$$

$$c/ \mathcal{A} = \int_{\beta}^1 f^{-1}(x) dx = 1 - \beta^2$$

avec β^2 est l'aire du carré de côté β .

D'où $A = 1 - (1 + \beta)e^{-2\beta} - \beta^2$