

N° d'inscription

--	--	--	--	--	--

Le sujet comporte 5 pages. Les pages 4/5 et 5/5 sont à rendre avec la copie.

Exercice 1 (3 points)

La densité démographique d'une population est le nombre moyen d'habitants par km^2 .

Le tableau ci-dessous donne, pour les années indiquées, la densité démographique en Tunisie.

Année	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
Rang (R_i)	1	2	3	4	5	6	7	8
Densité (Y_i)	67.1	71.4	72.4	73.2	74	74.6	75.1	75.4

Source : INS 2022

Les résultats seront arrondis à 10^{-1} .

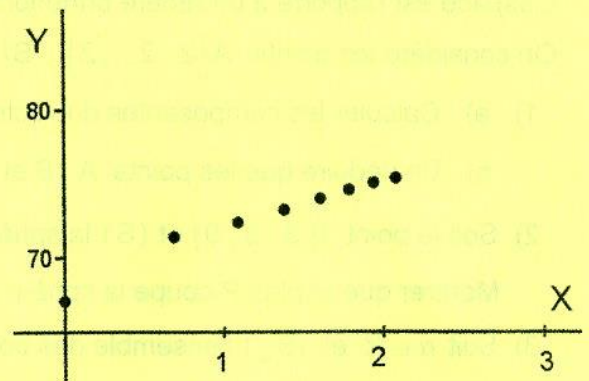
- 1) a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre R et Y .
b) Donner une équation de la droite de régression de Y en R .
c) Déterminer selon ce modèle, la densité démographique en Tunisie pour l'année 2025.

- 2) On pose $X = \ln(R)$.

Dans la figure ci-contre, on a représenté le nuage de points de la nouvelle série statistique (X, Y) .

- a) Justifier que l'on peut procéder à un ajustement affine de la série (X, Y) .

- b) La droite de régression de Y en X a pour équation $Y = 3.8X + 67.9$.



Déterminer selon ce nouveau modèle la densité démographique en Tunisie pour l'année 2025.

- 3) La superficie de la Tunisie est 163610 km^2 .

Estimer selon chacun des deux modèles la population de la Tunisie en 2025.

Exercice 2 (5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - 4iz - 6 + 2i\sqrt{3} = 0$.

a) Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est $\Delta = (2\sqrt{3} - 2i)^2$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

On considère les points A, B et K d'affixes $z_A = \sqrt{3} + i$, $z_B = -\sqrt{3} + 3i$ et $z_K = 2i$.

Dans la figure 1 de l'annexe jointe, on a tracé le cercle (ζ) de centre O et de rayon 2.

2) a) Montrer que A appartient à (ζ) .

b) Vérifier que K est le milieu du segment $[AB]$.

c) Construire les points A et B.

3) Montrer que $z_A - z_B = 4e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

4) Soit E le point d'affixe $z_E = 2$.

La perpendiculaire à (AB) menée de E coupe le cercle (ζ) en un deuxième point F d'affixe z_F .

On pose $z_F = 2e^{i\theta}$ où θ est une mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OF})$.

a) Montrer $e^{i\theta} - 1 = 2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$.

b) Montrer que $\frac{z_F - z_E}{z_A - z_B} = i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{6}\right)}$.

c) Montrer alors que $z_F = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

d) Montrer que les points O, B et F sont alignés.

Exercice 3 (4.5 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(2, 2, \sqrt{2})$, $B(1, 3, 0)$ et $C(3, 1, 0)$.

1) a) Calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

b) En déduire que les points A, B et C déterminent le plan P d'équation $x + y - 4 = 0$.

2) Soit le point $I(3, 3, 0)$ et (S) la sphère de centre I et de rayon $R = 2$.

Montrer que le plan P coupe la sphère (S) suivant le cercle (ζ) de rayon $\sqrt{2}$ et de centre $H(2, 2, 0)$.

3) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et (S_α) l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace tels que

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x\cos\alpha + 2y\cos\alpha - 2\sqrt{2}z\sin\alpha - 6 = 0.$$

a) Justifier que (S_α) est la sphère de centre $J(\cos\alpha, -\cos\alpha, \sqrt{2}\sin\alpha)$ et de rayon $2\sqrt{2}$.

b) Montrer que (S_α) et P sont tangents au point $K(2 + \cos\alpha, 2 - \cos\alpha, \sqrt{2}\sin\alpha)$.

c) Calculer la distance IK.

d) En déduire que le point K appartient à un cercle que l'on précisera.

Exercice 4 (7.5 points)

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = (1 - \frac{1}{x}) \ln x$.

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement.

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$. Interpréter graphiquement.

2) a) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{x-1+\ln x}{x^2}$.

b) Calculer $f'(1)$.

c) Montrer que $f'(x) > 0$, si et seulement si, $x \in]1, +\infty[$.

d) Dresser le tableau de variation de f .

3) Soit $a \in]1, +\infty[$. Dans la **figure 2** de l'annexe ci-jointe :

- OABC est un carré de côté a .

- (Γ) est la courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de la fonction $x \mapsto \ln x$, $x > 0$.

a) Etudier la position relative de (C_f) et (Γ) .

b) Tracer la courbe (C_f) .

4) Soit $\lambda \in]1, +\infty[$. On désigne par $A(\lambda)$ l'aire de la partie du plan limitée par (C_f) , (Γ) et les droites d'équations $x = \frac{1}{\lambda}$ et $x = \lambda$.

a) Calculer $\int_1^\lambda \frac{\ln x}{x} dx$.

b) Montrer que $A(\lambda) = (\ln \lambda)^2$.

c) Déterminer, en fonction de a , le réel $\lambda_0 > 1$ tel que $A(\lambda_0)$ est égale à l'aire du carré OABC.

d) Placer λ_0 et $\frac{1}{\lambda_0}$ sur l'axe des abscisses.

5) Soit g la restriction de la fonction f à l'intervalle $]0, 1]$.

a) Montrer que g réalise une bijection de $]0, 1]$ sur un intervalle que l'on déterminera.

On note g^{-1} la fonction réciproque de g .

b) Soit u la suite définie par $u_n = g^{-1}(n \ln(n))$, $n \geq 1$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

c) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $g\left(\frac{1}{n}\right) \leq n \ln(n) \leq g\left(\frac{1}{n+1}\right)$.

d) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} n u_n$.



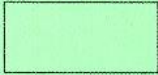
Section : N° d'inscription : Série :

Nom et Prénom :

Date et lieu de naissance :

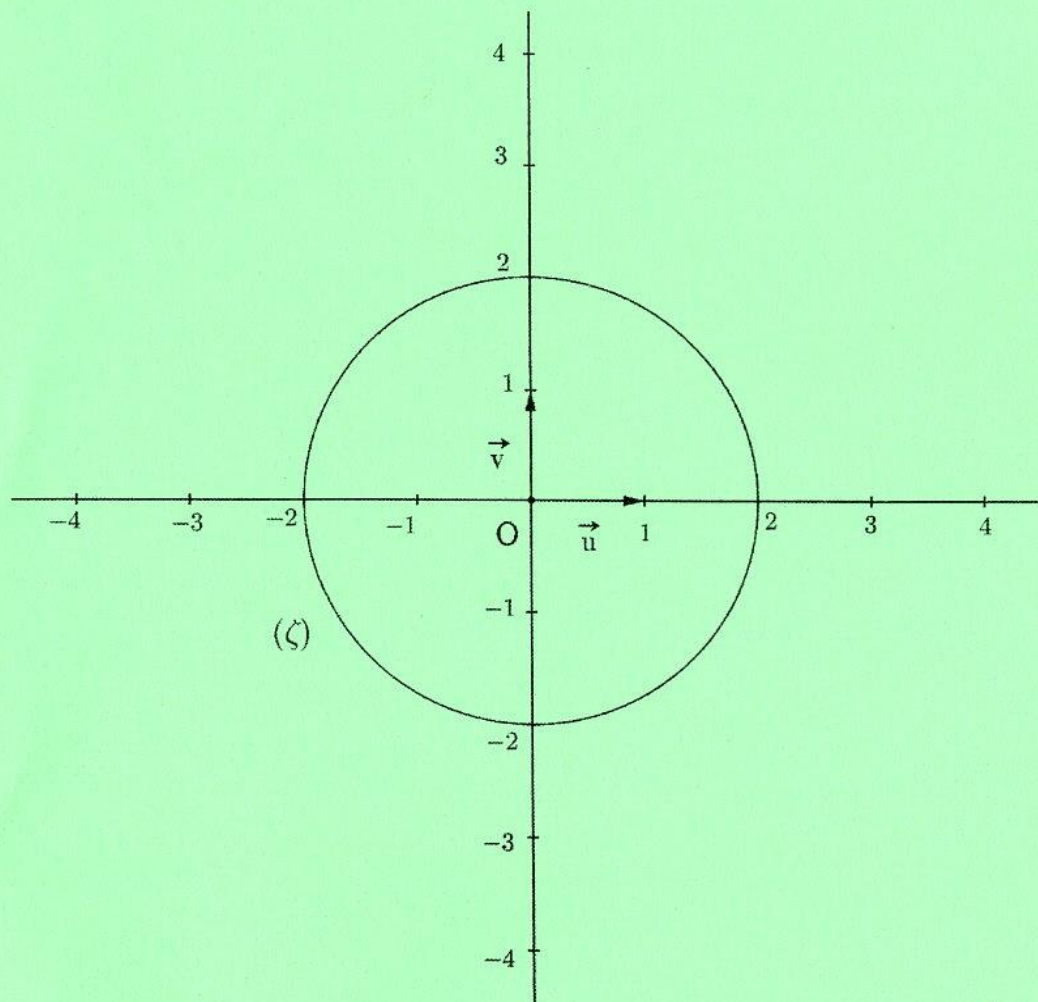
Signatures des surveillants

.....
.....



Épreuve: Mathématiques - Section : Sciences expérimentales
Session de contrôle (2025)
Annexe à rendre avec la copie

Figure 1



Ne rien écrire ici

Figure 2

