REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ◇◇◇◇ **EXAMEN DU BACCALAUREAT** SESSION **2015**	Epreuve : **MATHEMATIQUES** Durée : 3 H Coefficient : 3
Section : **Sciences expérimentales**	**Session principale**

Le sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

Les pages 5/6 et 6/6 sont à rendre avec la copie.

Exercice 1 : (5 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les points $A(1,1,0)$, $B(1,-1,2)$, $C(0,1,1)$ et $D(1,1,4)$.

1/ a) Montrer que A, B et C déterminent un plan qu'on notera (P).

b) Justifier que (P) est d'équation $x+y+z-2=0$.

c) Vérifier que D n'appartient pas au plan (P).

2/ Soit $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC et H le milieu du segment $[AB]$.

a) Montrer que le triangle ABC est rectangle en C.

b) En déduire que H est le centre du cercle $\mathscr{C}$.

3/ Soit Δ la droite perpendiculaire au plan (P) passant par le point H.

Justifier qu'une représentation paramétrique de Δ est $\begin{cases} x=1+\alpha \\ y=\alpha \\ z=1+\alpha \end{cases}$; $\alpha \in \mathbb{R}$.

4/ Soit M un point de Δ.

a) Justifier que $MA=MB=MC$.

b) Montrer qu'il existe un unique point I de Δ tel que $IA=ID$.

Donner ses coordonnées.

c) Déduire de ce qui précède, que les points A, B, C et D appartiennent à une même sphère (S) dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 2 : (5 points)

Dans l'annexe ci-jointe **(Figure 1)**, $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormé direct du plan et (C) est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{3}$.

1/ Soit A le point d'affixe $a = 1 + i\sqrt{2}$.

a) Montrer que A appartient au cercle (C).

b) Placer A.

2/ On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^2 - 2i\sqrt{3}z - 6i\sqrt{2} = 0$.

a) Montrer que le discriminant Δ de l'équation (E) est égal à $12a^2$.

b) En déduire que les solutions de l'équation (E) sont :

$$z_1 = \sqrt{3}\left[-1 + i(1-\sqrt{2})\right] \quad \text{et} \quad z_2 = \sqrt{3}\left[1 + i(1+\sqrt{2})\right]$$

3/ On considère le point K d'affixe $z_K = i\sqrt{3}$ et on désigne par M_1 et M_2 les points d'affixes respectives z_1 et z_2.

a) Vérifier que K est le milieu du segment $[M_1M_2]$.

b) Montrer que $\dfrac{z_2 - z_1}{a} = 2\sqrt{3}$.

En déduire que la droite (M_1M_2) est parallèle à la droite (OA).

c) Montrer que $M_1M_2 = 6$.

d) Placer le point K et construire alors les points M_1 et M_2.

Exercice 3: (3 points)

On appelle capacité vitale chez l'homme, le volume d'air maximum pouvant être mobilisé par une inspiration forcée suivie d'une expiration forcée.

Le tableau ci-dessous donne la capacité vitale C, exprimée en cm^3, chez des hommes âgés de 40 ans en fonction de leur taille t exprimée en cm.

t (en cm)	152	156	160	166	170	174	178	180	182
C (en cm^3)	3525	3620	3710	3850	3945	4035	4130	4175	4220

1/ a) Donner une valeur approchée à 10^{-5} près du coefficient de corrélation linéaire entre t et C.

b) Justifier que l'on peut procéder à un ajustement affine par la méthode des moindres carrés de la série (t, C).

c) Donner une équation de la droite de régression de C en t. (Les coefficients seront arrondis à 10^{-2} près).

d) Déduire de cet ajustement une estimation de la capacité vitale d'un homme âgé de 40 ans et de taille égale à 188 cm ?

2/ En fait, la capacité vitale C (exprimée en cm^3) chez l'homme dépend de sa taille t (exprimée en cm) et de son âge g (exprimé en années).

De nombreuses expériences ont permis d'exprimer C en fonction de t et g selon la relation (R) : $C = \alpha t + \beta g + 754$, où α et β sont des constantes (ne dépendant pas de t et g)

a) Donner l'expression de C pour $g = 40$.

b) En déduire, en utilisant 1/ c), les valeurs de α et β.

3/ Estimer la capacité vitale d'un homme âgé de 50 ans et mesurant 188 cm.

Exercice 4 : (7 points)

Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = x - \dfrac{\ln x}{x}$.

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1/ a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) - x$.

b) En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet deux asymptotes que l'on précisera.

c) Etudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à la droite Δ d'équation $y = x$.

2/ a) Montrer que, pour tout réel x de $]0,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{(x^2-1)+\ln x}{x^2}$.

b) Montrer que

(x^2-1) et $\ln x$ sont de même signe sur chacun des intervalles $]0,1[$ et $]1,+\infty[$.

c) En déduire le signe de $f'(x)$ sur chacun des intervalles $]0,1[$ et $]1,+\infty[$.

d) Montrer que 1 est l'unique solution de l'équation $f'(x)=0$.

e) Dresser le tableau de variation de f.

3/ a) Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ admet une unique tangente D parallèle à la droite Δ.

Préciser les coordonnées du point B, point de contact de $\mathscr{C}$ et D.

b) Donner une équation de D.

4/ Dans l'annexe ci-jointe **(Figure 2)**, on a tracé relativement au repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, la droite Δ et la courbe (Γ) d'équation $y=\dfrac{\ln x}{x}$.

a) Soit le point $A(\frac{1}{e},0)$.

Placer le point A et vérifier que A appartient à D.

b) Tracer la droite D et placer le point B.

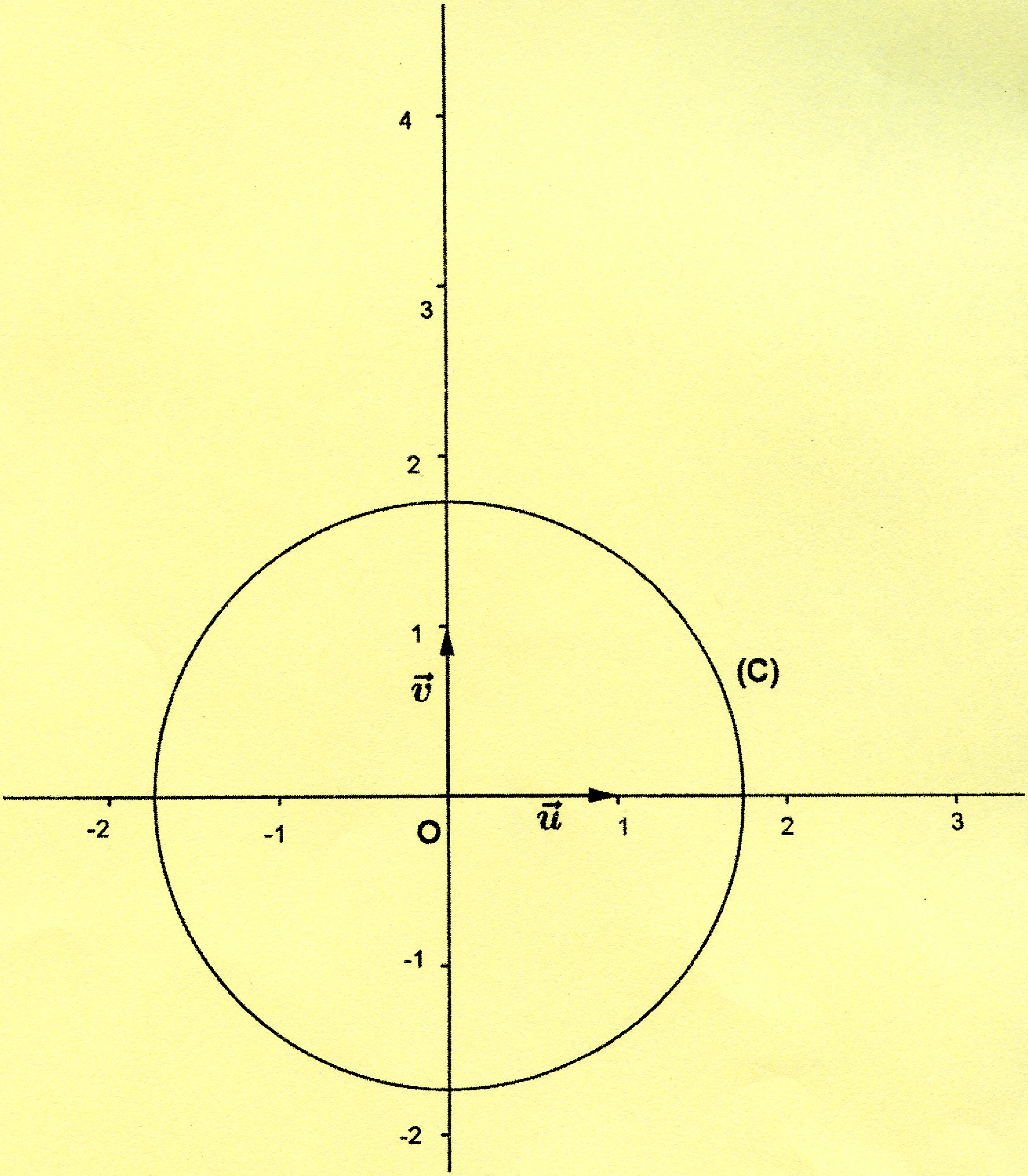
c) Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

5/ Soit $\mathscr{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, la droite Δ et les droites d'équations $x=\dfrac{1}{e}$ et $x=e$.

Calculer $\mathscr{A}$.

Annexe (à rendre avec la copie)

(Figure 1)



(Figure 2)