REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ◇◇◇◇ **EXAMEN DU BACCALAUREAT** SESSION **2015**	Epreuve : **MATHEMATIQUES** Durée : 4 H Coefficient : 4
Section : **Mathématiques**	**Session principale**

Exercice 1 (5 points)

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $z^2 - 2z + 4 = 0$.

b) Déterminer une écriture exponentielle de chacune des solutions de (E).

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère le cercle (Γ) de centre O et de rayon 2 et le point A d'affixe 2 .

Placer les points B et C d'affixes respectives $2e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

3) Soit $\theta \in \left]-\pi, \pi\right]$ et M le point du cercle (Γ) d'affixe $2e^{i\theta}$.

On désigne par N le point de (Γ) tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$. Justifier que N a pour affixe $2e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}$.

4) Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

a) Vérifier que la rotation r a pour expression complexe : $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z + 2 - 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

b) Soit F et K les milieux respectifs des segments [BM] et [CN]. Montrer que r(F) =K.

c) En déduire la nature du triangle AFK.

5) a) Montrer que $AF^2 = 4 - 2\sqrt{3}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$.

b) En déduire l'affixe du point M pour laquelle AF est maximale et construire le triangle AFK correspondant.

Exercice 2 (4 points)

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

1) Soit f la similitude directe de centre A qui envoie B sur C. Déterminer l'angle et le rapport de f.

2) Soit g la similitude indirecte de centre A qui envoie C sur B.

a) Déterminer le rapport de g.

b) Déterminer l'axe Δ de g.

c) Soit D le point défini par $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Montrer que g(B) = D et en déduire que $[BD)$ est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{ABC}$

3) a) Montrer que fog est une symétrie axiale et préciser son axe .

b) On pose $D' = f(D)$. Montrer que D' est le symétrique de B par rapport à A.

4) La bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{CAD'}$ coupe la droite (CD') en un point J .

Soit I le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC. Déterminer $f(I)$.

Exercice 3 (4points)

1) On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E): $47x+53y = 1$.

a) Vérifier que $(-9,8)$ est une solution de (E).

b) Résoudre l'équation (E).

c) Déterminer l'ensemble des inverses de 47 modulo 53.

d) En déduire que 44 est le plus petit inverse positif de 47 modulo 53.

2) a) Justifier que $45^{52} \equiv 1 \pmod{53}$.

b)Déterminer alors le reste de 45^{106} modulo 53.

3) Soit $N = 1 + 45 + 45^2 + ... + 45^{105} = \sum_{k=0}^{k=105} 45^k$.

a) Montrer que $44\,N \equiv 10 \pmod{53}$.

b) En déduire le reste de N modulo 53.

Exercice 4 (7 points)

I- Soit f la fonction définie sur $[0,\pi]$ par $f(x) = e^{\sin x}$.

On désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Déterminer la dérivée f' et dresser le tableau de variation de f sur $[0,\pi]$.

b) Montrer que la droite $\Delta : x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe (C_f).

c) Soit (T) la tangente à (C_f) au point d'abscisse 0.

Justifier que (T) a pour équation $y = x + 1$.

2) Soit la fonction g définie sur $[0,1]$ par $g(x)=e^x\sqrt{1-x^2}-1$.

On donne ci-contre le tableau de variation de g .

x	0		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$		1
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	0	$\nearrow$	$g\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$	$\searrow$	-1

a) Justifier que l'équation $g(x)=0$ admet dans l'intervalle $]0,1[$ une solution unique α.

b) En déduire le signe de $g(x)$ sur $[0,1]$.

3) On se propose de déterminer la position relative de (C_f) et de sa tangente (T) au point d'abscisse 0 sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Soit la fonction h définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ par $h(x)=e^{\sin x}-(x+1)$.

a) Vérifier que pour tout $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $h'(x)=g(\sin x)$.

b) Montrer qu'il existe un unique réel β dans $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin\beta=\alpha$.

c) Déterminer alors l'image par la fonction sinus de chacun des intervalles $[0,\beta]$ et $\left[\beta,\frac{\pi}{2}\right]$.

d) Dresser le tableau de variation de h.

e) En déduire que pour tout x de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $f(x)\geq x+1$. Conclure.

II

1) a) Montrer que pour tout réel $x\geq 0$, $\sin x\leq x$.

b) Déduire alors que pour tout réel $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $f(x)\leq e^x$.

c) Dans l'annexe ci-jointe, on a tracé la courbe de la fonction $x\mapsto e^x$.

Tracer la droite (T) et la courbe (C_f).

2) a) Montrer que $\int_0^1 f(x)dx\leq e-1$ et que $\int_1^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx\leq e\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$.

b) Soit A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C_f), l'axe $(O,\vec{i})$ et les droites d'équations $x=0$ et $x=\pi$. Montrer que $\frac{\pi^2}{4}+\pi\leq A\leq e\pi-2$.

Annexe (à rendre avec la copie)